

Étude de la dérivabilité

Exercice 1: Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto x|x|$
2. $g : x \mapsto \frac{x}{|x| + 1}$
3. $h : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Exercice 2: Soit $f : x \mapsto x - [x] - (x - [x])^2$ définie sur \mathbb{R} .

1. Montrer que f est périodique.
2. Est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 3: Soit $f : x \mapsto x^x$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* et que l'on peut la prolonger par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.
3. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4:

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 5: Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

Calculs de dérivée

Exercice 6: Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto e^{e^x}$
2. $f_2 : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$
5. $f_5 : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$
6. $f_6 : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) + \sin(x)}$

Exercice 7: Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x-1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f' .
3. En déduire une autre expression de f .

Théorème de Rolle

Exercice 8: Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0; 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 9: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur \mathbb{R} .

On suppose que f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Montrer que f n'est pas périodique sur \mathbb{R} .

Exercice 10: [*] *Théorème de Rolle généralisé*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que

$$\exists c \in]0; +\infty[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

Théorèmes des accroissements finis

Exercice 11: A l'aide de l'égalité des accroissements finis, étudier la limite de $f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

Exercice 12: On s'intéresse, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. A l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

3. En déduire un encadrement de S_n . En déduire la nature de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4. Montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Convexité

Exercice 13: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 14: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue.

Le résultat persiste-t-il si f est uniquement définie sur $[0; 1]$?

Exercice 15: Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave. En déduire que pour tout $x, y \in]1; +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Étude de suites récurrentes

Exercice 16: Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Dérivées successives

Exercice 17: Calculer les dérivées n -ième des fonctions suivantes

1. $f_1 : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ 3. $f_3 : x \mapsto \cos^3(x)$ 5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{1+x}$
 2. $f_2 : x \mapsto x^2(1+x)^n$ 4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ 6. $f_6 : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

Exercice 18:

1. Calculer de deux façons les dérivées k -ième de la fonction $x \mapsto x^{2n}$.
 2. En déduire $\sum_{l=0}^n \binom{n}{l}^2$.

Exercice 19: Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ et telle que $h(t) = (1-t^2)^3$ pour $t \in [-1; 1]$. Déterminer le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ telle que h est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} .

Exercice 20: Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons h la fonction définie sur \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ a + bx + cx^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que h soit de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{R} .